Attractive : Innovative Education Journal
Vol. 5 No. 2, July 2023

Implementasi Persamaan Diferensial Model Logistik untuk Memprediksi Tingkat Pertumbuhan Kendaraan Bermotor di Kota Pematang Siantar

Sonang Sandika Nauli Simbolon, Juli Antasari Br Sinaga, Debora Exaudi Sirait
Universitas HKBP Nommensen Pematang Siantar, Indonesia.

Corresponding Author: juli.sinaga@uhnp.ac.id

ARTICLE INFO
Article history:
Received
June 15, 2023
Revised
July 14, 2023
Accepted
August 1, 2023

ABSTRACT

The growth of the motorized vehicle population is continuous, which means that the growth in the time is not broken. The logistic model is a refinement of the exponential model put forward by Malthus and the logistic model is also considered to get predictive results that are closer to the actual data. This study aims to the describe the determinants of the growth rate of motorized vehicles in Pematang Siantar City. The subject of this research is data of motorized from 2017-2020. Based on the results of this study, the carrying capacity is 112.680. The author can draw that the conclusion of the MAPE value model from each model to find out the value that is closest to the actual value, namely the logistic model with k=0,249895 which is the most accurate compared to the other models, resulting in sellers Pt)=112.680/((6,518516) e^(-(0,249895)t)+1) and based on this model the authors look for the growth value of motorized vehicles in thr 2024 with a value of t=7 producing 52.812,61 units

Keywords: *Diferential Equation, Logistics Model, Groeth Rate*

Journal Homepage https://www.attractivejournal.com/index.php/aj/

Published by CV. Creative Tugu Pena

PENDAHULUAN

Pertumbuhan populasi kendaraan bersifat kontinu, yang artinya pertumbuhan waktu tanpa putus. Ada dua model yang digunakan dalam menentukan pertumbuhan populasi yang sifatnya kontinu dapat digunakan model eksponensial dan model logistik sebagaimana yang dikemukakan oleh (Iswanto, 2012). Model logistik merupakan penyempurnaan dari model eksponensial yang dikemukakan oleh Malthus dan model populasi logistik ini pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Francois Verhulst pada tahun 1838. Model logistik juga sampai saat ini masih dianggap lebih mendapatkan hasil prediksi yang lebih mendekati data sebenarnya(Pandu, 2020).

Banyaknya jumlah kendaraan bermotor dikota Pematang Siantar, dikarenakan adanya kemudahan sistem kredit dalam pembelian kendaraan bermotor tersebut, sedangkan faktor lainnya yaitu masuknya kendaraan yang dibeli dari luar kota Pematang Siantar atau mutasi masuk. Selain ihal tersebut pertumbuhan ekonomi juga mempengaruhi tingkat pertumbuhan kendaraan bermotor, dimana semakin tinggi pertumbuhan ekonomi maka semakin banyak orang yang mampu membeli kendaraan bermotor (Budihardjo, 2015). Berdasarkan data yang diperoleh dari BPS kota Pematang Siantar total kendaraan bermotor yang terdaftar pada tahun 2020 mencapai 27.617 unit yang terdiri dari empat jenis penggolongan mobil penumpang, mobil bus, mobil truk, dan sepeda motor (bps.go.id, 2020). Laju pertumbuhan kendaaraan bermotor dari tahun 2019 hingga tahun 2020 mengalami kenaikan, tentunya berbagai pihak perusahaan kendaraan bermotor juga harus dapat memprediksi jumlah stok persediaan kendaraan bermotor ditahun yang akan datang dengan mengacu pada tingkat pertumbuhan kendaraan bermotor tersebut. Agar tidak mengalami kerugian jika stoknya berlebihan, dan tidak terjadi kekurangan jika stoknya sedikit. (Noviana, 2021).

1. Landasan Teori

Persamaan diferensial sering muncul dalam model matematika yang berupaya menggambarkan situasi dunia nyata. Banyak hukum alam dan hipotesis dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan menggunakan bahasa matematika. Misalnya, turunan muncul dalam fisika sebagai kecepatan dan percepatan, dalam biologi sebagai laju pertubuhan populasi, dalam psikologi sebagai laju pembelajaran, dan dalam keuangan sebagai laju pertumbuhan investasi (Nuraeni , 2017). Model logistik merupakan solusi dari persamaan diferensial biasa non linear orde pertama yang sederhana. Model logistik ini juga modifikasi dari model yang ditemukan oleh Malthus yaitu model eksponensial. Pierre Francois Verhulst pertama kali memperkenalkan persamaan logistik pada tahun 1838. Murtafia, dkk (2018)

Model pertumbuhan logistik mempertimbangkan faktor pertumbuhan intrinsik *(intrinsic growth)* dan kapasitas batas *(carrying capacity)* oleh lingkungan tempat dimana populasi tersebut hidup (Lipkin dan Smith, 2006). menurut Pratiwi (2020); Kosala (2000) mengatakan bahwa model pertumbuhan logistik bahwa persediaan logistik ada batasnya, model ini mengasumsikan bahwa pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (equilibrium).

Bentuk umum dari model pertumbuhan logistik adalah :

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(\frac{P}{C}\right) \qquad (2.1)$$

Keterangan :

P: Jumlah populasi saat t

k: Laju pertumbuhan intrinsik

C: Carrying Capacity

Dengan memisahkan kedua peubah dalam Persamaan (2.1) seperti berikut :

$$\frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{C}\right)} = k\,dt$$

dan kemudian mengintegralkan kedua ruas, maka diperoleh penyelesaian umum :

$$\frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{C}\right)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{C}\right)} = \int k\,dt$$

$$\int \frac{dP}{P-\frac{P^2}{C}} = \int k\,dt$$

$$\int \frac{CdP}{CP-P^2} = \int k\,dt$$

$$\ln P - \ln(C-P) = kt + c$$

$$\ln\left(\frac{P}{C-P}\right) = kt + c$$

$$\frac{P}{C-P} = e^{kt+c}$$

$$P = e^{kt+c}(C-P)$$

$$P = Ce^{kt+c} - Pe^{kt+c}$$

$$P + Pe^{kt+c} = Ce^{kt+c}$$

$$P\left(1+e^{kt+c}\right) = Ce^{kt+c}$$

$P = \frac{Ce^{kt+c}}{1+e^{kt+c}}$ (2.2)

Dari persamaan (2.2) jika diberikan nilai awal $t = 0$ dan $P(0) = P_0$ kemudian disubstitusikan ke dalam (2.2) maka akan diperoleh nilai $c = \ln\left(\frac{P_0}{C-P_0}\right)$ selanjutnya nilai c tersebut disubstitusikan kembali ke dalam persamaan (2.2), sehingga diperoleh solusi khusus dari model logistik seperti berikut :

$$P = \frac{Ce^{kt+\ln\left(\frac{P_0}{C-P_0}\right)}}{1+e^{kt+\ln\left(\frac{P_0}{C-P_0}\right)}}$$

$$P = \frac{Ce^{kt+\left(\frac{P_0}{C-P_0}\right)}}{1+e^{kt+\left(\frac{P_0}{C-P_0}\right)}}$$

$$P = \frac{\frac{Ce^{kt}P_0}{C-P_0}}{\frac{C-P_0+e^{kt}P_0}{C-P_0}}$$

$$P = \frac{Ce^{kt}P_0}{C-P_0+e^{kt}P_0}$$

$$P = \frac{CP_0}{\left(C-P_0+e^{kt}P_0\right)e^{-kt}}$$

$$P = \frac{C\,P_0}{Ce^{-kt}-P_0e^{kt}+P_0}$$

$$P = \frac{C}{\left(\frac{C}{P_0}e^{-kt}-e^{-kt}+1\right)}$$

Maka diperoleh persamaan solusi khusus dari model logistik :

$P = \frac{C}{e^{-kt}\left(\frac{C}{P_0}-1\right)+1}$ (2.3)

Jika Persamaan (2.3) dilimitkan $t \to \infty$, didapatkan (untuk k > 0):

$N_{max} = \lim_{t\to\propto} N = C = \frac{a}{b}$ (2.4)

Bedasarkan penjelasan Verhulst, bahwa tingkat pertumbuhan dan daya tampung *(carrying capacity)* dapat diperkirakan dengan rentang waktu pengambilan data yang diinginkan. Dalam penelitian ini dilakukan beberapa perkiraan laju pertumbuhan dan daya tampung berdasarkan interval waktu pengambilan ampel untuk kemudian dilakukan analisis terhadap model.

Model logistik pada penelitian ini menggunakan interval waktu yaitu yang pertama dengan menggunakan tiga tahun pertama. Jika P_0 adalah jumlah pada saat $t = 0, P_1$ pada saat waktu $t = 1$,dan P_2 pada waktu $t = 2$, maka dari persamaan (2.4) dapat diperoleh :

- Untuk $t = 1$,

$$P_1 = \frac{\frac{a}{b}}{e^{-k(1)}\left(\frac{\frac{a}{b}}{P_0}-1\right)+1}$$

$$P_1 = \frac{abP_0}{b(bP_0+ae^{-k}-bP_0e^{-k})}$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{bP_0+ae^{-k}-P_0e^{-k}}{aP_0}$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{b}{a}+\frac{e^{-k}}{P_0}-\frac{bP_0e^{-k}}{aP_0}$$

$$\frac{1}{P_1} = \frac{b}{a}\left(1-e^{-k}\right)+\frac{e^{-k}}{P_0}$$

$\frac{b}{a}\left(1-e^{-k}\right) = \frac{1}{P_1}-\frac{e^{-k}}{P_0}$ (2.5)

- Untuk $t = 2$,

$$P_2 = \frac{\frac{a}{b}}{e^{-k(2)}\left(\frac{\frac{a}{b}}{P_0}-1\right)+1}$$

$$P_2 = \frac{abP_0}{b\left(bP_0+ae^{-k}-bP_0e^{-2k}\right)}$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{bP_0+ae^{-k}-bP_0e^{-2k}}{aP_0}$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{b}{a} + \frac{e^{-k}}{P_0} - \frac{bP_0e^{-2k}}{aP_0}$$

$$\frac{1}{P_2} = \frac{b}{a}\left(1-e^{-k}\right) + \frac{e^{-2k}}{P_0}$$

$$\frac{b}{a}\left(1-e^{-k}\right) = \frac{1}{P_2} - \frac{e^{-k}}{P_0} \qquad (2.6)$$

Untuk mengeliminasi $\frac{b}{a}$, dilakukan pembagian Persamaan (2.6) oleh Persamaan (2.5) maka diperoleh:

$$\frac{\frac{b}{a}(1-e^{-k})=\frac{1}{P_2}-\frac{e^{-2k}}{P_0}}{\frac{b}{a}(1-e^{-k})=\frac{1}{P_1}-\frac{e^{-k}}{P_0}}$$

$$1+\ e^{-k} = \frac{\frac{1}{P_2}-\frac{e^{-2k}}{P_0}}{\frac{1}{P_1}-\frac{e^{-k}}{P_0}}$$

$$1+\ e^{-k} = \frac{\frac{P_0-P_2e^{-2k}}{P_0P_2}}{\frac{P_0-P_1e^{-2k}}{P_0P_1}}$$

$$1+\ e^{-k} = \frac{P_0P_1(P_0-P_2e^{-2k})}{P_0P_2(P_0-P_1e^{-k})}\text{z}$$

$$e^{-k} = \frac{P_0P_1-P_1P_2e^{-2k}}{P_0P_2-P_1P_2e^{-k}} - \left(\frac{P_0P_2-P_1P_2\ e^{-k}}{P_0P_2-P_1P_2e^{-k}}\right)$$

$$e^{-k}\left(P_0P_2 - P_1P_2e^{-k}\right) = P_0P_1 - P_1P_2\,e^{-2k} - (P_0P_2 - P_1P_2e^{-k})$$

$$P_0P_2e^{-k} - P_1P_2e^{-2k} = P_0P_1 - P_1\,P_1\,e^{-2k} - (P_0P_2 - P_1P_2e^{-k})$$

$$P_0P_2e^{-k} - P_1P_2e^{-k} = P_0P_1 - P_0P_2$$

$$-P_0P_2e^{-k} + P_1P_2e^{-k} = -P_0P_1 + P_0P_2$$

$$e^{-k}(P_1P_2 + P_1P_2) = -P_0P_1 + P_0P_2$$

$$e^{-k} = \frac{P_0P_2-P_0P_1}{P_1P_2-P_0P_2}$$

$$e^{-k} = \frac{P_0(P_2-P_2)}{P_2(P_1-P_0)} \qquad (2.7)$$

$$k = \ln\left[\frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)}\right]$$

Substitusi Persamaan (2.7) ke (2.5), maka :

$$\frac{b}{a}\left(1-\frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)}\right) = \frac{1}{P_1} - \frac{\frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)}}{P_0}$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{P_2(\,P_1-P_0)}{P_2(P_1-P_0)} - \frac{P_0(P_2-P_1)}{P_2(\,P_1-P_0)}\right) = \frac{P_2(P_1-P_0)-P_1\,(P_2-P_1)}{P_1P_2(\,P_1-P_0\,)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{P_2(\,P_1-P_0)-P_1(P_2-P_1)}{P_1P_2(P_1-P_0)}}{\frac{P_2(P_1-P_0)-P_0(P_2-P_1)}{P_2(P_1-P_0)}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{P_2(P_1-P_0)[P_2\,(\,P_1-P_0)-P_1(P_2-P_1)]}{P_1P_2(P_1P_2-P_0P_2-P_0P_2+P_0P_1)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{P_1P_2-P_0P_2-P_1P_2+{P_1}^2}{P_1(P_1P_2-P_0P_2-P_0P_2+P_0P_1)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{{P_1}^2-P_0P_2}{P_1(P_0P_1-2P_0P_2+P_1P_2)}$$

$\frac{a}{b} = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{P_1{}^2 - P_0P_2}$ (2.8)

Sehingga persamaan daya tampung (carrying capacity) dapat dituliskann menjadi:

$N_{max} = \lim_{t\to\infty} N = C = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{P_1{}^2 - P_0P_2}$ (2.9)

persamaan (2.9) merupakan rumus untuk mencari nilai daya tampung.

HASIL DAN PEMBAHASAN

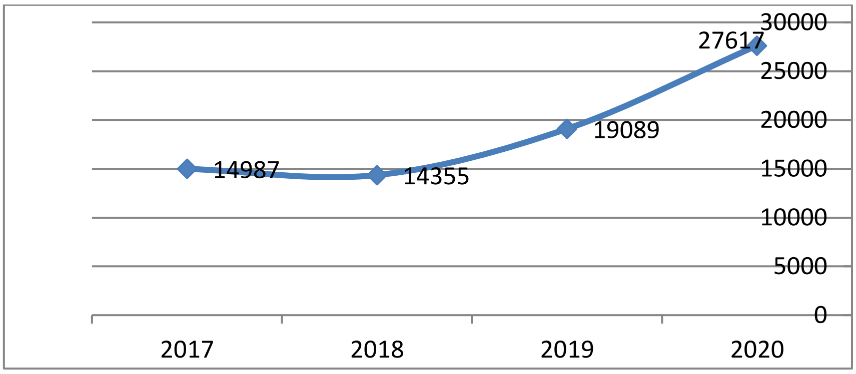
Berdasarkan data yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Pematang Siantar yaitu berupa data jumlah kendaraan di Kota Pematang Siantar tahun 2017 samapi 2020, disajikan sebagaii berikut:

Tabel 1. Jumlah Kendaraan Bermotor yang Terdaftar di Kota Pematang Siantar

Tahun	Mobil Penumpang	Mobil Bus	Mobil Barang	Sepeda Motor	Total (Unit)
2017	877	64	646	13.400	14.987
2018	985	66	678	12.626	14.355
2019	1.563	87	950	16.529	19.129
2020	2.937	229	1.557	22.894	27.617

Sumber : Badan Pusat Statisik (BPS) Kota Pematang Siantar

Dari tabel diatas agar mengetahui seberapa besar peningkatan jumlah kendaran bermotor setiap tahunnya maka penulismenyajikan data dalam bentuk grafik eperi pada grafik 1.



Gambar 1. Grafik Peningkatan Jumlah Kendaraan Bermotoe di Kota Pematang Siantar

Dari grafik terlihat bahwa jumlah kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar pada tahun 2020 mengalami peningkatan yang cukup jauh dari tahun sebelumnya yaitu mencapai 27.617 unit meskipun sempat mengalami penurunan di tahun 2018. Untuk mencari daya tampung (carrying capacity) akan diambil data jumlah kendaraan bermotor dalam tahun 2017 (P_0) = 14.987 , tahun 2018 (P_1) = 14.355 dan tahun 2019 (P_2) = 19.129. Untuk memperoleh nilai daya tampung digunakan persamaan (2.9) solusi khusus yang disajikan pada bab 2.Maka diperoleh :

$C = \frac{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}{P_1{}^2 - P_0P_2}$ (4.1)

Dengan mensubstitusikan nilai jumlah kendaraan bermotor diatas ke persamaan (4.1) diperoleh :

$$C = \frac{14.355\left((14.987)(14.355) - 2\,(14.987)(19.129) + (14.355)(19.129)\right)}{(14.355)^2 - (14.987)(19.129)}$$

$C = 112.680$
Maka daya tampung kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar diperkirakan berjumlah 112.680 unit.
Sesuai dengan kajian teori yang ada persamaan (2.3) digunakan untuk memprediksi jumlah kendaraan bermotor, disajikan dalam bentuk persamaan sebagai berikut :

$$P(t) = \frac{C}{e^{-kt}\left(\frac{C}{P_0}-1\right)+1} \quad (4.2)$$

Dimana Cadalah daya tampung (C) dan jumlah kendaraan bermotor pada tahun 2018 (P_0) ke dalam persamaan (4.2) akan diperoleh persamaan logistik umum sebagai berikut :

$$P(t) = \frac{112.680}{(6{,}518516)e^{-kt}+1} \quad (4.3)$$

Selanjutnya Persamaan (4.3) akan digunakan sebagai acuan untuk membentuk model pertumbuhan pertahunnya. Untuk mengetahui nilai laju pertumbuhan (k) per tahun yaitu dengan mensubstitusikan jumlah populasi $P(t)$ ke Persamaan (4.3). Setelah nilai laju pertumbuhan (k) diketahui, kemudian akan dibentuk model pertumbuhan logistik per tahunnya yang akan penulis jelaskan pada bagian berikut :

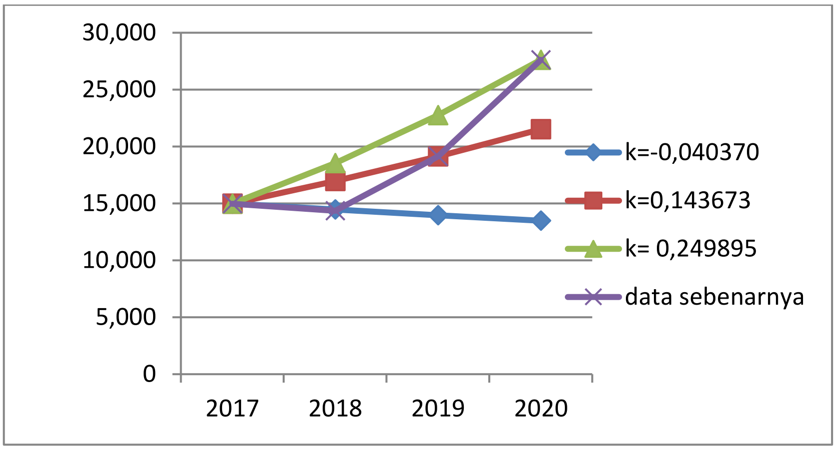
$$P(t) = \frac{112.680}{(6{,}518516)e^{-(-0{,}040370)t}+1}$$
$$P(t) = \frac{112.680}{6{,}518516e^{-(0{,}143673)t}+1}$$
$$P(t) = \frac{112.680}{(6{,}518516)e^{-0{,}249895t}+1}$$

Hasil prediksi persamaan (4.2) dengan berbagai nilai k berdebda dapat dilihat secara jelas pada tabel 2

Tabel 2. Hasil prediksi model pertumbuhan dengan nilai k berbeda

Tahun	Data Sebenarnya	$k = -0,040370$	$k = 0,143673$	$k = 0,249895$
2017	14.987	14.987	14.987	14.987
2018	14.355	14.470,17	16.954,17	18.541,56
2019	19.129	13.968,2	19.129	22.742,91
2020	27.617	13.482,06	21.520,09	27.617

Agar kenaikan nilai prediksi model logistik dengan nilai k berbeda lebih jelas, dapat dilihat grafiknya pada gambar 2.



Gambar 2. Grafik hsil daa sebenarnya dan berdasarkan perbedaan nilai k

Pada model dengan $k = -0{,}040370$ diperoleh nilai $MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n}|PE_t|}{n} = \frac{|4|}{3} = 1{,}3\%$

Pada model dengan $k = 0{,}143673$ diperoleh nilai $MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n}|PE_t|}{n} = \frac{|4|}{3} = 1{,}3\%$

Pada model dengan $k = 0{,}249895$diperoleh nilai $MAPE = \frac{\sum_{t=1}^{n}|PE_t|}{n} = \frac{|45|}{3} = 15{,}6\%$

Setelah menghitung prediksi model logistik dari semua perbedaan nilai k maka penulis menggunakan model dengan nilai $k = 0{,}24985$ karena model dengan nilai k tersebut adalah yang paling diasumsikan lebih mendekati realita/data sebenarnya dari jumlah kendaraan bermotor.

Tahun 2024 (t=7)

$P(5) = \frac{112.680}{(6{,}518516)e^{(0{,}249895)(7)}+1}$

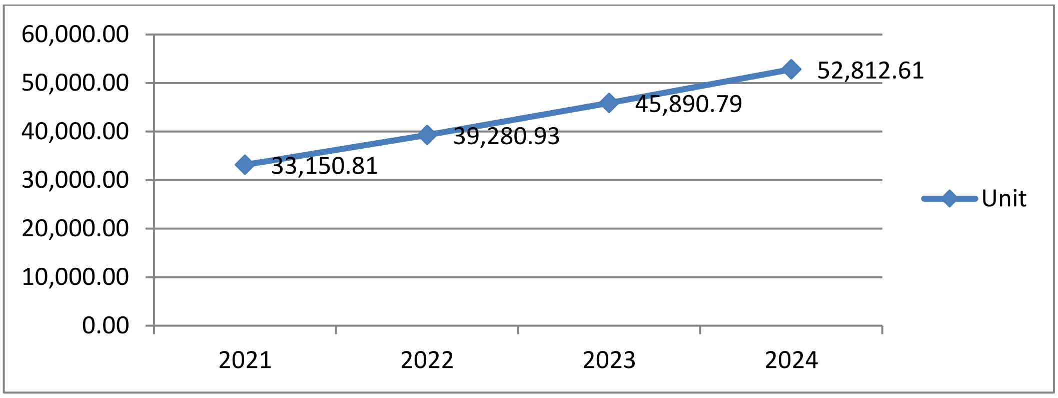
$= 52.812{,}61$ unit

Hasil perhitungan prediksi jumlah populasi dengan menggunakan model logistik akan terus meningkat setiap tahunnya seperti tabel 3.

Tabel 3. Hasil perhitungan prediksi jumlah populasi dengan Model Logistik

Tahun	**Hasil Prediksi**
2021	33.150,58
2022	39.280,93
2023	45.890,79
2024	52.812,61

Lebih jelasnya grafik peningkatan jumlah populasi kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar hingga tahun 2024 disajikan pada grafik berikut :



Gambar 3. Grafik hasil prediksi model logistik di tahun mendatang

KESIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya telah dijelaskan hasil penelitian tentang penerapan model logistik untuk memprediksi tingkat pertumbuhan kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar, sehingga dapat disimpulkan bahwa:. Model logisik yang akan digunakan untuk memprediksi pertumbuhan kendaraan bermotot yaitu model dengan nilai $k = 0{,}249895$ dengan rumus $P(t) = \frac{112.680}{(6{,}518516)e^{(0{,}249895)(t)}+1}$ berdasarkan model logistik diprediksi jumlah kendaraan bermotor di Kota Pematang Siantar untuk tahun 2024 yaitu 52.812,16 unit.

REFERENSI

Bps.go.id. (2020). *Jumlah Kendaraan Bermotor Kab/Kota dan Jenis Kendaraan di Provinsi Sumatera Utara (unit), 2020.* Retrieved from: https://www.bps.go.id/indikator/indikator/view_data_pub/1200/api_pub/V2w4dFkwdFNLNU5mSE95Und2UDRMQT09/da_10/1

Budihardjo, E. (2015). *Kota dan Lingkungan Pendekatan Baru Masyarakat Berwawasan Ekologi*. Cetakan Kedua, Jakarta: LP3ES Indonesia.

Iswanto, R. J. (2012). *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Kosala, D. P. (2000). Model Pertumbuhan Populasi dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik. *Majalah Matematika dan Statistika*, Vol.1, No. 1, pp. 21-29.

Lipkin, L. and Smith, D. (2006). *Logistic Growth Model*. Retrieved From : http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/logistic/logi1.html.

Murtafi'ah, W. dan Apriandi, D. (2018). *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. UNIPMA Press, Madiun. ISBN 978-602-0725-06-2. Retrieved from: http://eprint.unipma.ac.id/75/

Noviana, R. (2021). *Modul Persamaan Diferensial: Persamaan Diferensial Orde Satu*. Jakarta: Universitas Kristen Indonesia. Retrieved from: http://repository.uki.ac.id/6148/1/PersamaanDiferensialOrdeSatu

Nuraeni, Z. (2017). Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Estimasi Jumlah Populasi. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *5*(1), 9-16.

Pandu, Y. K. (2020). Prediksi Penduduk Kabupaten Alor Dengan Menggunakan Model Pertumbuhan Logistik Pada Beberapa Tahun Mendatang. *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, 2(1), 71-81.

Pratiwi, C. D. (2020). Aplikasi Persamaan Diferensial Model Populasi Logistik untuk Mengestimasi Penduduk di Kota Balikpapan. *Jurnal AdmathEdu*, 10(1), 63-76.